www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

INSTITUT NATIONAL DES TELECOMMUNICATIONS

CONCOURS D'ENTREE EN PREMIÈRE ANNEE DE L'ECOLE DE GESTION

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Coefficient : 4
Durée : 4 heures

Avertissement : Dans l'évaluation des copies il sera tenu le plus grand compte de la qualité de la rédaction, notamment pour ce qui est de la présentation, de la clarté des raisonnements et de la concision.

Les résultats des questions non traitées peuvent être utilisés par la suite en indiquant clairement qu'ils sont admis.

L'épreuve compte trois exercices :

Les exercices 1 et 2 sont à traiter par tous les candidtas.
L'exercice 3 est réservé aux candidats issus des classes de préparation aux écoles de Gestion et de Commerce.
L'exercice 4 est réservé aux candidats issus des classes de Mathématiques Spéciales.

Tous les instruments de calculs sont autorisés.

Les exercices 1 2 et 3 sont après l'exercice 4.

EXERCICE IV (Réservé aux candidats issus des classes de Mathématiques Spéciales)

Soit l'équation différentielle suivante dans laquelle f est une application numérique de **R** dans **R** dérivable sur **R** :

$$f(x)\,\frac{d^2y}{dx^2} - f'(x)\,\frac{dy}{dx} + [f(x)]^3\,y = 0 \qquad (E)$$

y est une fonction inconnue, deux fois dérivable sur **R**.

1°) Soit ϕ une application de **R** dans **R**, deux fois dérivable sur **R**. On envisage le changement de variable : $u = \phi(x)$

a) Déterminer $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{d^2y}{dx^2}$ en fonction de $\frac{dy}{du}$, $\frac{d^2y}{du^2}$, $\frac{du}{dx}$, $\frac{d^2u}{dx^2}$

b) Soit I le sous ensemble de **R** défini par : $I = \{ x \in \mathbf{R} \ / \ f(x) \neq 0 \}$

On pose alors : $\phi(x) = \int_0^x f(t)\ dt$

Montrer que le changement de variable défini en a) permet alors de transformer sur I, l'équation différentielle (E) en une équation différentielle (E_1) à coefficients constants.

c) Résoudre l'équation différentielle (E_1) et en déduire la solution générale de (E) sur I en fonction de ϕ.

2°) Montrer que la solution trouvée pour x dans I est aussi solution de (E) pour tout x dans **R**.

3°) Dans le cas où $f(0) \neq 0$, déterminer la solution particulière g de (E) vérifiant les conditions initiales : $g(0) = 0$ et $g'(0) = 1$.

4°) Résoudre sur R l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} xy'' - y' + x^3y = 0 \\ y(0) = 0 \text{ et } y'(\sqrt{2\pi}) = 1 \end{cases}$$

EXERCICE I

L'objet de cet exercice est l'étude de trois suites récurrentes linéaires.

Dans tout l'exercice, on considère l'espace vectoriel $\mathbf{R}^3$ muni de la base canonique $B = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

Soit A la matrice carrée d'ordre 3 à coefficients réels définie par A :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

On désigne par f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ dont la matrice dans la base B est A.

1°) a) Montrer que f admet deux valeurs propres : $\alpha = 1$ et $\mu = 2$.

b) Déterminer les sous espaces propres – notés $E\alpha$ et $E\mu$ – associés à chacune des valeurs propres α et μ.

Montrer que le vecteur $\vec{u} \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$ appartient à $E\alpha$ et que le vecteur $\vec{w} \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}$ appartient à $E\mu$.

c) En déduire que l'endomorphisme f n'est pas diagonalisable.

2°) Déterminer l'ensemble T des vecteurs $\vec{t}$ de $\mathbf{R}^3$ tels que $f(\vec{t}) = \vec{u} + \vec{t}$ puis montrer que $\vec{v} \begin{vmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{vmatrix}$ est élément de T.

3°) a) Montrer que $B' = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ est une base de $\mathbf{R}^3$.

b) Donner, en justifiant le résultat, la matrice de passage P de la base B à la base B'.

Déterminer sa matrice inverse P^{-1}.

c) Déduire des résultats précédents la matrice, notée A', associée à l'endomorphisme f dans la base B'.

4°) a) Démontrer, en utilisant la formule du binôme de Newton que :

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots\ldots + C_n^n = 2^n$$

b) Soit J la matrice carrée d'ordre 3, à coefficients réels définie par :

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Calculer J^n pour tout entier naturel n.

c) En déduire A'^n

5°) Soient (X_n), (Y_n), (Z_n) trois suites de nombres réels définies par : X_0 , Y_0 , Z_0 et les relations de récurrence :

$$\begin{cases} X_{n+1} = Y_n + Z_n \\ Y_{n+1} = X_n + 2Y_n - Z_n \\ Z_{n+1} = -X_n + Y_n + 2Z_n \end{cases}$$

Déterminer les valeurs de X_n , Y_n , Z_n , en fonction de X_0 , Y_0 , Z_0 .

EXERCICE II

Cet exercice a pour objet de montrer que l'équation : $x^3 + x - 1 = 0$ admet une solution unique et de trouver un encadrement de cette solution.

Soit la fonction numérique f, définie par :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longrightarrow & f(x) = x^3 + x - 1 \end{array}$$

1°) a) Etudier les variations de la fonction f et en dresser son tableau de variation.

b) Tracer le graphique – noté (C) – de f sur l'intervalle [0,1] dans un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$. On prendra comme unité graphique 10 cm sur les deux axes. On placera également les points d'abscisses 0, 1/3, 1/2, 3/4, 1.

2°) Déduire de l'étude précédente l'existence d'une racine unique, notée α, de l'équation $x^3 + x - 1 = 0$.

Montrer que : $1/2 < \alpha < 1$.

3°) On considère un point A de (C) d'abscisse a. La tangente en A à (C) coupe l'axe des abscisses en un point B d'abscisse b.

Montrer que : $b = \dfrac{2a^3 + 1}{3a^2 + 1}$

4°) Soit M_1 le point de (C) d'abscisse $X_1 = 1$. La tangente à (C) en M_1 coupe l'axe des abscisses en un point d'abscisse x_2. La tangente au point de (C) d'abscisse x_2 coupe l'axe des abscisses en un point d'abscisse x_3. En itérant ce procédé, on construit une suite (x_n) de nombres réels : $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots$

Montrer que : $x_{n+1} = \dfrac{2x_n^3 + 1}{3x_n^2 + 1}$

5°) Dans cette question, nous aller montrer que la suite (x_n) est convergente.

a) Soit la fonction numérique ϕ définie par:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longrightarrow & \phi(x) = 2x^3 - 3\alpha x^2 + 1 - \alpha \end{array}$$

i) Montrer que $\phi(\alpha) = 0$.

ii) Montrer que la fonction ϕ est strictement croissante sur $[\alpha, +\infty[$

b) Calculer pour tout n dans $\mathbf{N}^*$ la différence $(x_{n+1} - \alpha)$ en fonction de x_n.
En déduire en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout n dans $\mathbf{N}^*$: $x_n > \alpha$

c) Calculer, pour tout n dans $\mathbf{N}^*$, $(x_n - x_{n+1})$ en fonction de n et en déduire que: si $x_n > \alpha$ alors $x_{n+1} < x_n$.

d) Montrer alors que la suite (x_n) est convergente.

6°) Dans cette question, nous allons montrer que la suite (x_n) a pour limite le nombre défini à la question 2°).

a) Montrer que la fonction π définie sur $[\alpha, 1]$ par :

$$\begin{array}{ccc} [\alpha, 1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ [\alpha, 1] & \longrightarrow & \pi(x) = \phi(x) - f(x) \end{array}$$

est une fonction décroissante et négative (on pourra calculer $\pi''(x)$)

b) Pour tout n dans $\mathbf{N}^*$ calculer : $(x_{n+1} - \alpha) - (x_n - x_{n+1})$

en fonction de α et en déduire que : si $\alpha < x_n < 1$ alors $0 < x_{n+1} - \alpha < x_n - x_{n+1}$

c) Montrer alors que la suite (x_n) admet α pour limite.

7°) En faisant successivement n=1, n=2, n=3 donner trois encadrements de α.

Tournez la page S.V.P.

EXERCICE III.

(Cet exercice est réservé aux candidats issus des classes de préparation aux Ecoles de Commerce et de Gestion).

Le nombre de personnes se présentant à un guichet donné d'une poste, pendant une période de 15 minutes est une variable aléatoire X dont la loi de probabilité est donnée par le tableau suivant :

Valeurs i de X	0	1	2	3	4
pi = P(X=i)	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

La probabilité pour qu'une personne se présentant au guichet demande des timbres est 0,6. Appelons Y la variable aléatoire égale au nombre de personnes ayant demandé des timbres durant une période de 15 minutes.

1°) Calculer la moyenne E(X) et la variance V(X) de la variable aléatoire X. (on précisera les formules utilisées pour ces calculs).

2°) Calculer la probabilité d'avoir i personnes au guichet et parmi celles-ci j personnes demandant des timbres, ($0 \leq i \leq 4$ et $0 \leq j \leq i$). On construira un tableau donnant ces probabilités.

3°) En déduire la probabilité des 4 événements suivants:

" Y = 1 "; " $X \geq 2$ et Y = 0 "

" Y = 1 sachant que $X \geq 2$ " ; " X = 3 sachant que $Y \geq 1$ ".

4°) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire Y; préciser sa moyenne E(Y) et sa variance V(Y).

5°) On considère les deux variables aléatoires suivantes :

Z = " Nombre de personnes se présentant au guichet en une heure ".

et

T = " nombre de personnes demandant des timbres en une heure ".

Préciser la moyenne et l'écart-type des variables aléatoires Z et T.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail